6: Derivadas y sus aplicaciones

Función derivada por definición:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ → nº $\mathbb{R}$ siempre.

DERIVADAS DE OPERACIONES:

$y = k[f(x) \pm g(x)]$ —— $y' = k \cdot f'(x) \pm k \cdot g'(x)$

$y = f(x) \cdot g(x)$ —— $y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$y = \frac{f(x)}{g(x)}$ —— $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

DERIVADAS ALGEBRAICAS:

$y = k$ $\quad y' = 0$ Función constante

$y = x$ $\quad y' = 1$ Función identidad.

$y = k \cdot [f(x)]^n$ $\quad y' = k \cdot n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = \sqrt[n]{f(x)}$ $\quad y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$

DERIVADAS TRIGONOMÉTRICAS:

$y = \operatorname{sen} f(x)$ $\quad y' = [\cos f(x)] \cdot f'(x)$

$y = \cos f(x)$ $\quad y = -[\operatorname{sen} f(x)] \cdot f'(x)$

$y = \tan f(x)$ $\quad y = [1 + \tan^2 f(x)] \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$

$y = \operatorname{arcsen} f(x)$ $\quad y = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$ arcoseno

$y = \arccos f(x)$ $\quad y = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$ arcocoseno.

$y = \arctan f(x)$ $\quad y = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

DERIVADAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS:

$y = a^{f(x)}$ $\quad y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$ $\quad y = e^x = y'$

$y = \log_a f(x)$ $\quad y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a} = \frac{f'(x) \cdot \log_a e}{f(x)}$

$y = \ln f(x)$ $\quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

Ecuación de la recta tangente:

$y - y_0 = (x - x_0) \cdot f'(x_0)$ $\quad y_0 = f(x_0)$

*Cuando ec. de la curva está en función de x y de y, derivar implícitamente.

⚠ Derivación implícita:

(cuando en la ec. de la curva hay x e y)

1. Derivar x en función de x
2. Derivar y en función de y (y mantener y')

ej. $y^2 - 2x = 0$

$2y \cdot y' - 2 = 0$

Diferencial de una función:

$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx_0$ ↳ diferencia en $x \Rightarrow h$

x_0 dado.

Estudio de una función:

(No hay que saber todo para poder dibujar la función).

· DOMINIO:

Todo $\mathbb{R}$ menos x que anulen $f(x)$ → donde la $f(x)$ no esté definida.

· PAR/IMPAR (simétrica/asimétrica):

- Par si $f(x) = f(-x)$
- Impar si $f(x) = -f(-x)$

· SIGNO:

Factorizar $f(x)$ e introducir en tabla de signos con valores de las x que anulan los factores

· PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES:

con x:

$f(0) = y \quad x = 0$

$f(x) = 0$ → despejar $x \quad y = 0$

con y: ↗

· ASÍNTOTAS:

Verticales: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \longrightarrow x = a$ A.V. $a = n^{o}\,\mathbb{R}$ donde $f(x)$ no está definida

Horizontales: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \longrightarrow y = b$ A.H.

Oblicua: $y = mx + n$ A.O.

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] \quad m \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{R}$

· CONTINUIDAD:

continua si $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

· DERIVABILIDAD:

Derivable si continua y $\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$

· CRECIMIENTO/DECRECIMIENTO:

se estudia signo de $f'(x)$.

- Si $f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creciente
- Si $f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreciente.

· MÁXIMOS Y MÍNIMOS:

$f'(x) = 0$ → soluciones ⇒ puntos críticos.

$f''(\text{P.C.}) \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{hay mínimo en } x = \text{P.C.} \quad y = f(\text{P.C.}) \\ < 0 \rightarrow \text{hay máximo en } x = \text{P.C.} \quad y = f(\text{P.C.}) \end{cases}$

↓ valor punto crítico.

· CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD:

se estudia signo de $f''(x)$. $\begin{cases} > 0 \rightarrow \text{convexa } \cup \\ < 0 \rightarrow \text{cóncava } \cap \end{cases}$

· PUNTOS DE INFLEXIÓN:

$f''(x) = 0$ → soluciones ⇒ candidatos a P.I.

$f'''(\text{candidato P.I.}) \neq 0$ → P.I en x = candidato $y = f(\text{candidato})$

Optimización de funciones:

- para calcular lo máximo/mínimo a partir de recursos limitados.
  - dos sistemas con dos incógnitas a partir de los "recursos" dados y su aplicación
  - despejar incógnita en ecuación determinada y sustituir en función de aplicación.
  - derivar función e igualar a 0.
  - Sustituir soluciones (puntos críticos) en $f''(x)$ y resolver; si <0, máximo valor función inicial indeterminada para los valores de(l) punto(s) crítico(s) obtenido(s).

Teorema de Rolle:

Si f es una función continua en $[a,b]$, $f(a) = f(b)$, y derivable en (a,b), entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio del cálculo diferencial. /Teorema de los incrementos finitos/ Teorema de Young/Teorema de la Grange.

Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La pendiente de la recta tangente en c es la misma que la de la recta que une los extremos a, b.