7: Integrales y sus aplicaciones

BÁSICAS:

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

$$\int 1dx = x + k$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad (\text{si } n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln|x| + k.$$

$$\int a^{f(x)}dx = \frac{a^x \cdot f'(x)}{\ln a} + k$$

Integrales con raíces convertirlas a potencias.

INMEDIATAS:

$$\int f(x)^n \cdot f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + k \quad (\text{si } n \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + k$$ ← valor absoluto

$$\int \operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)dx = -\cos f(x) + k$$

$$\int \cos f(x) \cdot f'(x)dx = \operatorname{sen} f(x) + k$$

$$\int [1 + tg^2 f(x)] \cdot f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx = tg f(x) + k$$

$$\int tg f(x) \cdot f'(x)dx = -\ln|\cos f(x)| + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)}^2}dx = \operatorname{arcsen} f(x) + k$$

$$\int \frac{f'(x)}{-\sqrt{1-f(x)}^2}dx = \arccos f(x) + k$$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + k$$

$$\int \ln f(x) \cdot f'(x)dx = -\ln|\cos f(x)| + k$$

INTEGRACIÓN POR PARTES:

$$\int u(x) \cdot v'(x) = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)$$

Elegir como u lo que no sé integrar y como v' lo que sí sé integrar.

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES:

→ numerador de grado inferior a denominador.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A}{(x-x_1)}dx + \int \frac{B}{(x-x_2)}dx + \int \frac{C}{(x-x_3)}dx$$

x_1, x_2, x_3 raíces de $Q(x)$

⚠ si grado numerador > grado denominador → dividir → $\int \underbrace{C(x)}_{\text{cociente}}dx + \int \frac{\overbrace{R(x)}^{\text{resto}}}{\underbrace{d(x)}_{\text{divisor}}}dx$

Inés
Camino Selectividad

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN:

ej. $\int e^{-2x+9}dx = \int e^{t}\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\int e^{t}dt = -\frac{1}{2}e^{t} = -\frac{1}{2}e^{-2x+9}+k.$

$-2x+9 = t$

$-2dx = dt$

$dx = -\frac{dt}{2}$

Integrales definidas:

Cuando una función es continua en $[a,b]$:

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = n^{\underline{o}}\ \mathbb{R}.$$

↳ primitiva.

ÁREAS:

$$\lim_{x\to 0}\left(\text{Área}_{\text{por exceso}} - \text{Área}_{\text{por defecto}}\right) = \text{Área}_{\text{buscada}} = \int_a^b f(x)dx.$$

área entre la gráfica de f, el eje x y las abscisas $x=a$ y $x=b$.

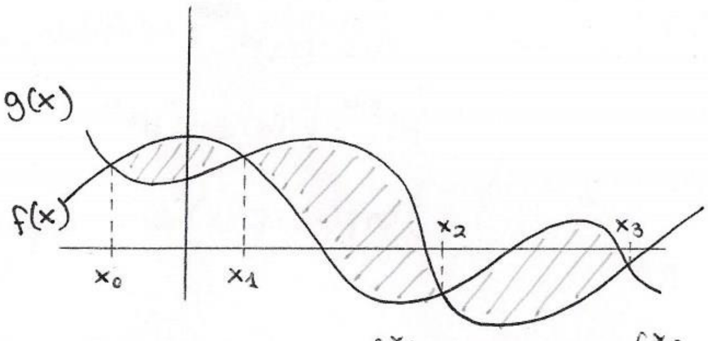
⚠ Cuando $f(x)<0$:

área $f(x)$ entre a y b $= -\int_a^b f(x)\,dx$.

(porque todas las áreas son positivas)

Área definida por dos curvas:

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ → puntos de corte de $f(x)$ y $g(x)$ sobre abscisas.



→ Dibujar siempre gráfica para saber qué función va por encima o por debajo en cada intervalo.

$$\text{Área del recinto} = \int_{x_0}^{x_1} f(x)-g(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} g(x)-f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)-g(x)dx$$

VOLÚMENES:

cuerpo de revolución definido por $y=f(x)$ donde $x\in[a,b]$

$V = \pi\cdot r^2\cdot h \rightarrow r = f(x),\ h = b-a$

si gira alrededor de x:

$$\int_a^b \pi\cdot f(x)^2 dx$$

si gira alrededor de y:

$$\int_a^b \pi\cdot g(y)^2 dx$$

ej. $y=\sqrt{x} \rightarrow x = y^2$ → se sustituye en $f(x)$

⇓

$$\int_a^b \pi\cdot f(y^2)^2$$

⚠ Resultados de áreas y volúmenes tienen que ser siempre >0.